

Title	Multiplicative Galois module structure(Integral Representation and Related Topics)
Author(s)	片岡, 俊孝
Citation	数理解析研究所講究録 (1985), 549: 159-168
Issue Date	1985-02
URL	http://hdl.handle.net/2433/98866
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Multiplicative Galois module structure

東大・教養 片岡 俊孝 (Toshitaka Kataoka)

§ 0. 序.

この小文では、T. Chinburg による代数体の一般化された単数群の Galois module structure をあらわす不変量の定義と性質を、かんたんにまとめてみたい。とくに Chinburg は、Artin root number, L 函数の $s=0$ での Taylor 展開での最初の 0 でない項の係数等との結びつきにかんする予想を提出している。

まず、群環の class group について復習しよう。 G を有限群とし、 $K_0(\mathbb{Z}G)$ を群環 $\mathbb{Z}G$ の K 群とする。 $\mathbb{Z}G$ の class group $Cl(\mathbb{Z}G)$ を、

$$Cl(\mathbb{Z}G) = \text{Ker} (K_0(\mathbb{Z}G) \xrightarrow{\text{rank}} \mathbb{Z})$$

で定める。 また、 $\mathbb{Z}G$ を $\mathbb{Q}G$ のひとつの maximal order を \mathcal{O} とすると、 canonical inclusion $\mathbb{Z}G \subset \mathcal{O}$ より定まる

$$D(\mathbb{Z}G) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ker} (Cl(\mathbb{Z}G) \rightarrow Cl(\mathcal{O}))$$

は、次のとり方によらない。Fröhlich^{1) による} class group の
idelic な記述がある！

$$C\ell(\mathbb{Z}G) \simeq \text{Hom}_\Lambda(R_G, J(E)) / \text{Hom}_\Lambda(R_G, E^\times) \text{Det} U(\mathbb{Z}G).$$

ここに、

R_G : G の一般指標全体のなる環,

E : \mathbb{Q} 上有限次 Galois である十分大きな体, ($\mathbb{C} \subset E$)

$\Lambda = \text{Gal}(E/\mathbb{Q})$,

$J(E)$: E の idele 群,

$U(\mathbb{Z}G)$: $\mathbb{Z}G$ の unit idele 群, すなわち $\prod_{p: \text{素数}} (\mathbb{Z}_p G)^\times \times (\mathbb{R}G)^\times$.

Det の定義については, Fröhlich [3] をみよ。

上記の同型の定める自然な homomorphism $\text{Hom}_\Lambda(R_G, J(E))$
 $\rightarrow C\ell(\mathbb{Z}G)$ を φ , また, 自然な projection $C\ell(\mathbb{Z}G) \rightarrow C\ell(\mathbb{Z}G)/D(\mathbb{Z}G)$
 を τ であらわす。

§ 1. 不変量 Ω_m .

N/K を有限次代数体の Galois 拡大, $G = \text{Gal}(N/K)$ とする。
 S を N の素点の有限集合であって, すべての無限素点を含む
 G の作用で stable であるものとする。 $U = U(S)$ を N
 の S -units 全体のなる群とする。 $\gamma \in S$ で生成される自由 \mathbb{Z}
 加群, $X = X(S) = \text{Ker} \left(\begin{array}{ccc} \gamma & \rightarrow & \mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \sum_{s \in S} a_s s & \rightarrow & \sum_{s \in S} a_s \end{array} \right)$ と定める。

上のような $(N/k, S)$ が次の (i), (ii) をみたすとき, Tame であるという。

- (i) S は、 N/k で分岐する素点の素点を示す。
- (ii) 任意の N/k の中間体 F に対して、 S の F における有限素点に対応する F の ideal 類全体は、 F の ideal 類群を生成する。

Lemma (Tate). $(N/k, S)$ は Tame であるとする。このとき有限生成かつ cohomologically trivial な $\mathbb{Z}G$ 加群 A, B と exact sequence :

$$(*) \quad 0 \rightarrow U \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow X \rightarrow 0$$

が存在して、この exact sequence $(*)$ は、 $\text{Ext}_G^2(X, U)$ の canonical class に等しくなる。

canonical class の定義については、Tate [5] および Chinburg [1] を見よ。

有限生成 projective $\mathbb{Z}G$ 加群 P に対応する $K_0(\mathbb{Z}G)$ の元を (P) で表わすことにしよう。 M を有限生成かつ cohomologically trivial な $\mathbb{Z}G$ 加群とする。このとき、

$0 \leftarrow M \leftarrow P_0 \leftarrow P_1 \leftarrow 0$, P_0, P_1 は projective $\mathbb{Z}G$ 加群, と表わせば、 $(P_0) - (P_1) \in K_0(\mathbb{Z}G)$ は resolution のとり方によらない。これを (M) で表わす。

以上の準備のもとで, Clauburg の結果を述べよう。

Theorem 1 (Clauburg) $(N/k, S)$ は tame であるとする。上の Lemma の (*) をみたす A, B に対して, $(A) - (B) \in K_0(\mathbb{Z}G)$ は, $Cl(\mathbb{Z}G)$ に属し, この元は, A, B のとり方にも, S のとり方にもよらない。

上の定理で本質的なところは, " S のとり方によらない" という部分。このように $Cl(\mathbb{Z}G)$ の元を $\Omega_m(N/k) = \Omega_m$ とあらわすことにする。

また, subextension の Ω_m は, $\Omega_m(N/k)$ であらわせることも示されている。

Theorem 2 (Clauburg) H は G の部分群とする。このとき,

- (i) $\text{res}_{G \rightarrow H} \Omega_m(N/k) = \Omega_m(N/N^H)$,
- (ii) H が normal ならば,

$$\text{norm}_{G \rightarrow G/H} \Omega_m(N/k) = \Omega_m(N^H/k).$$

$\text{res}_{G \rightarrow H}$, $\text{norm}_{G \rightarrow G/H}$ については, Fröhlich [3] をみよ。

§ 2. Ω_m と Artin root number.

$\chi \in R_G$ に対して, $W(\chi) = W(N/k, \chi)$ を Artin root number

とする。(定義等については Fröhlich [3] を見よ)。

$\chi \in R_G$ に対して,

$$W'(\chi) = \begin{cases} W(\chi) & \chi \text{ is symplectic or } \pm 1, \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

symplectic character については, Martinet [4] がある。

Fröhlich [3] をみよ。ことに, χ は real-valued であるから,

$W(\chi) = \pm 1$ であることに注意せよ。 symplectic char

E は \mathbb{C} の部分体であるとし, p_∞ を自然なうめを

$E \hookrightarrow \mathbb{C}$ に対応する E の無限素点とする。 $\alpha \in \Lambda$ に対し,

p_∞^α を $|x|_{p_\infty^\alpha} = |x|_{p_\infty}$, $x \in E$, と定める。

$\text{Hom}_\Lambda(R_G, J(E))$ の元 $\underline{W}'(N/k)$ を次のように定める:

$$\underline{W}'(N/k)(\chi) \text{ の } v\text{-component} = \begin{cases} W'(N/k, \chi^{\alpha^{-1}}) & v = p_\infty^\alpha, \alpha \in \Lambda, \\ 1 & v \text{ is a finite prime.} \end{cases}$$

ここに, $\chi \in R_G$, v は N の素点である。

さて, $\Omega_m(N/k) \pmod{D(\mathbb{Z}G)}$ の Artin root number による

記述にかんする予想をのべよう。

Conjecture 1. $t(\Omega_m(N/k)) = t(q(\underline{W}'(N/k)))$

N/k が at most tamely ramified のときは, N の整数環

\mathcal{O}_N は, $\mathbb{Z}G$ -projective である。 $\Omega_a = (\mathcal{O}_N) - [K:\mathbb{Q}](\mathbb{Z}G) \in \mathcal{Q}(\mathbb{Z}G)$

と書く。このとき, M.J. Taylor によって, 等式

$$\Omega_a(N/K) = q(\underline{W}'(N/K))$$

が示されている。

予想1に対する部分的結果については, 次の§の最後の部分を見よ。

§ 3. Ω_m と L-series at $s=0$.

まず, Artin の L-~~函~~数の $\rho=0$ における特殊値に対する予想をかんたんに復習してみよう。(Tate [5]) $(N/K, S)$ は tame であるとする。

V を G の複素有限次元表現とし, χ_V (あるいは単に χ) をその指標としよう。 $\varphi: X(S) \rightarrow V(S)$ を injective G -homomorphism とする。このとき, φ の Coherne は, 有限である。 V, φ より定まる regulator を $R(V, \varphi)$ とかく。 $L_S(V, \rho)$ を表現 V の L-~~函~~数より, S の外にある K の有限素点, l に対応する Euler 因子をとり, のぞいたものとする。 $C_{V, S}$ で $L_S(V, \rho)$ の $\rho=0$ での Taylor 展開で 0 ではない最も次数の低い項の係数をあらわす。 $A(V, \varphi) = R(V, \varphi) / C_{V, S}$ と書く。

Conjecture 2. 任意 $\alpha \in \text{Aut } \mathbb{C}$ に対して, $A(V^\alpha, \varphi) = A(V, \varphi)^\alpha$ が成立する。

予想2が正しいければ, $A(V, \varphi)$ は代数的数となる。

$A(V, \varphi)$ によって生成されるイデアルについての予想がある。

$\mathcal{O}_E = \mathcal{O}$ を E の整数環とする。 G -加群 M, C に対して, $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(M, C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathcal{O})$ を C_M と略記する。 また, C^G, C_G をそれぞれ G が自明に作用する 最大の部分加群, 商加群をあらわす。 \mathcal{O} -加群 C が有限生成かつ Torsion であるとき, その order ideal を $\sigma(C)$ とかく。

M を $\mathcal{O}G$ -lattice として, $M \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O} \subset X$, V の dual と同型であるとする。 有限生成 G -加群の homomorphism $f: C \rightarrow D$ の Kernel, Cokernel は, ともに有限であるとする。 \mathcal{O} イデアル

$$\sigma(\text{Coker } n_M \circ f_M) / \sigma(\text{Ker } n_M \circ f_M)$$

を $\mathfrak{f}_M(f)$ とあらわす。 ただし,

$$f_M \circ n_M : (C_M)_G \xrightarrow{f_M} (D_M)_G \xrightarrow{n_M} (D_M)_G^G$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$X(\text{mod } \sum_{\sigma \in G} (\sigma-1)D_M) \mapsto \sum_{\sigma \in G} \sigma X$$

$\mathfrak{f}_M(f)$ は $\mathcal{O}G$ -lattice M のとり方によらない。

Conjecture 3. $(N/k, S)$ が Tame ならば, $A(V, \varphi)\mathcal{O} = \mathfrak{f}_M(\varphi)$.

予想2, 3 に関する Tate の結果として, 次のことがある。

Theorem (Tate [5]) χ_V が \mathbb{Q} -valued ならば, 予想2, 3 は正しい。

なお予想2,3の真偽は φ に依存しない。

予想3にあらわれた $f_M(\varphi)$ は、 \mathbb{Q}_m と以下のようにして結びつく。

$$H(G) = \left\{ b \in \text{Hom}_\Lambda(R_G, \text{Id}(E)) ; \begin{array}{l} \text{任意の } x \in R_G \text{ に対して, } b(x) \\ \text{は, } \mathbb{Q}(x) \text{ の 1 行 1 列 (i.e., } \mathbb{Q}\text{-加群として,} \\ \text{いくつかの } \mathbb{Q}(x) \text{ の元で生成される) } \end{array} \right\}$$

$$P(G) = \left\{ b \in H(G) ; \begin{array}{l} \text{ある } x \in R_G \text{ に対して, 次の (1)(2) が 成 立 する} \\ \text{(1) } b(x) \text{ は } \mathbb{Q}(x) \text{ の 単 項 1 行 1 列,} \\ \text{(2) } x \text{ が "symplectic ならずば", } b(x) \text{ は, } \mathbb{Q}(x) \\ \text{の いくつかの (totally) positive な 元 で 生成される} \end{array} \right\}$$

ただし、 $\text{Id}(E)$ は E の 1 行 1 列 全体 の 可換群、 $x \in R_G$ に対して、 $\mathbb{Q}(x)$ は、 \mathbb{Q} に $x(g)$, $g \in G$ を 添加 して 得 ら れ る 体、 x が "symplectic ならず $\mathbb{Q}(x)$ は 実 閉 分 体 である。

$H(G)$ は、自然な対応で、 $\text{Hom}_\Lambda(R_G, J(E)) / \text{Hom}_\Lambda(R_G, U(E))$ と同型であることに注意すると、§0 の Fröhlich による class group の idelic な記述は、次の同型を導く。

$$Cl(\mathbb{Z}G) / D(\mathbb{Z}G) \simeq H(G) / P(G).$$

$f(\varphi) \in \text{Hom}(R_G, \text{Id}(E))$ を次のように定める。 G の既約指標 χ に対して、 $f(\varphi)(\chi) = f_{M_\chi}(\varphi)$ 。ただし、 M_χ は、 $M_\chi \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$ の character が $\overline{\chi}$ となるような $\mathbb{Q}G$ -lattice。

Proposition 1. (Chinburg)

- (1) $q(\psi) \in H(G)$,
 (2) 上の同型 τ , $-\Omega_m(N/k) \subset \text{mod } D(\mathbb{Z}G)$ は, $q(\psi)$
 $\text{mod } P(G)$ に対応する。

予想 1, 2, 3 は, 次のような関係にある。

Proposition 2. 予想 2, 3 が $\forall \pi$ の V について正しいならば, 予想 1 は, 正しい。

R を generalized \mathbb{Q} -valued character 全体のなる R_G の部分環とする。

$$H_R(G) = \{b \mid R; b \in H(G)\} \subset \text{Hom}(R, \text{Id}(E)),$$

$$P_R(G) = \{b \mid R; b \in P(G)\}.$$

予想 2, 3 に対する Tate の部分的な結果より, 予想 1 に対しても, 次の成立する。

Proposition 3.

$H(G)/P(G)$ から $H_R(G)/P_R(G)$ への自然な準同型
 による $\tau(\Omega_m(N/k))$ と $\tau(q(W'(N/k)))$ の像は一致する。

なお, $\text{Cent } \mathbb{Q}G = \bigoplus_{\alpha} L_{\alpha}$, L_{α} は体, とすると, $H(G)/P(G)$
 $H_R(G)/P_R(G)$ は, それぞれ $\bigoplus_{\alpha} (L_{\alpha} \text{ のイデアル類群 })$,
 $\bigoplus_{\alpha} (L_{\alpha}/\mathbb{Q} \text{ の genus group})$ とは一致することに留意され
 たい。

文献

- [1] Ted Chinburg ; On the Galois structure of algebraic integers
and S-units, Inv. math., 74, 321-349, 1983
- [2] Ted Chinburg ; Multiplicative Galois module structure,
J. London Math. Soc, (2), 29, 23-33, 1984
- [3] A. Fröhlich ; Galois module structure of algebraic
integers, Springer, New York, 1983
- [4] J. Martinet ; Character theory and Artin L-functions,
in "Algebraic Number Fields", Proceedings of the
Durham Symposium 1975, Academic Press, 1977, 1-87
- [5] J. Tate ; Les Conjectures de Stark sur les fonctions L
d'Artin en $s=0$, Birkhäuser, 1984